שיטות סטטיסטיות בבדיקות התאמה לתקן הישראלי

מאת: ד"ר אברהם בן עזרא

מבוא

בבדיקות מעבדתיות בדבר תכונות של רכיבים בבניין, המטרה היא לקבוע האם אותו רכיב נבדק - מתאים לדרישות התקן החל.

מדובר במגוון רחב של רכיבים, כגון - חוזקו של הבטון [ראה: "קביעת חוזקו של הבטון" - מאת: אינג' אברהם בן עזרא, פורסם בבטאון "**הנדסה ואדריכלות**" 5/82 בהוצאת אגודת האינג'ינרים והארכיטקטים בישראל];

דוגמא נוספת - חוזק ההידבקות של חיפויי חוץ [ונתונים טכניים אחרים] - פסיפס/קרמיקה ע"פ ת"י 1555.1, או: חיפויי חוץ מאבני חיפוי על פי אחת מהשיטות התקניות - לפי ת"י 2378.2 (קיבוע רטוב), ת"י 2378.3 (קיבוע יבש), ת"י 2378.4 (הדבקה), ת"י 2378.5 - [שיטה מתועשת (ברנוביץ)] או ת"י 2378.6 (שיטת הקיר הכפול).

ככל שיש דרישה לתכונה מכנית הנמדדת בערכים מספריים של: חוזק ללחיצה, חוזק למתיחה, כוח שליפה (הידבקות), מאמץ כפיפה, וכיוצא בזה, הדרך לבדיקה היא נטילת מדגם קטן ביחס ל"אוכלוסייה" הגדולה ובדיקתו, שכן אין זה סביר לבדוק את כל הפריטים, ומסתפקים בבדיקת המדגם.

ההנחה היא כי **הפרט מלמד על הכלל**.

הפרמטרים

כדי שהפרט ילמד על הכלל, צריך להיות יחס מסוים בין הפרט לבין הכלל, ויחס זה הוא הפרמטר הראשון (יכונה: "פרמטר א"). ככל שפרמטר א' יותר גדול, כך גם ה"לימוד" על הכלל יהיה יותר מדויק, עד כדי מצב קיצוני בו גודל הפרט ישווה לגודל הכלל, ואז ה"לימוד" יגיע למאה אחוז.

דומה הדבר לקופסת גפרורים בה יש 100 גפרורים, וברצוננו לדעת מהו אחוז הגפרורים הנדלקים לעומת הגפרורים הפגומים. אם נבדוק את כל מאת הגפרורים, התוצאה שנקבל תהיה מדויקת (נכונה) במאה אחוז, וככל שנמעיט בגודל המדגם (במספר הגפרורים שייבדקו) כן הסקת מסקנתנו תהיה ברמת וודאות יותר קטנה.

פרמטר נוסף הוא הממוצע. הערך הממוצע של תוצאות בדיקת המדגם, בהחלט מלמד על תכונות המכלול המלא ("הכלל"; "האוכלוסייה").

פרמטר שלישי, הנזנח משום מה בשיטות הסטטיסטיות שבתקנים באופן גורף (בכל התקנים), הוא: מידת הפיזור.

נבחן לדוגמא לשם המחשה והבהרה, שתי יציקות של תקרות בטון.

ביציקת תקרה א' נלקחו 3 דגימות - גודל המדגם הוא 3. [מכאן שדרגת החופש = 2]. הדגימות עובדו לקוביות בטון וכעבור 28 יום נבדק החוזק של הקוביות ללחיצה, והתקבל כי חוזק הקוביות בערכים של ק"ג לסמ"ר - הוא: 295 ק"ג/סמ"ר, 300 ק"ג/סמ"ר ו-305 ק"ג/סמ"ר. [ממוצע: 300 ק"ג/סמ"ר].

ביציקת תקרה ב' נלקחו 3 דגימות - ובאותו סוג של בדיקות התקבלו התוצאות - 220 ק"ג/סמ"ר, 300 ק"ג/סמ"ר ו-380 ק"ג/סמ"ר. [ממוצע: 300 ק"ג/סמ"ר].

כלומר, מבחינת הממוצע, שתי התקרות זהות בחוזקן - והוא - על פי הממוצע שהתקבל - 300 ק"ג לסמ"ר.

אלא שתקרה א' חזקה יותר מתקרה ב', כי בה מידת הפיזור קטנה יותר, וההתנקזות סביב הממוצע צפופה יותר.

ככל שהפיזור גדול יותר - המדגם מייצג פחות, (ובסטייה גדולה יותר), את האוכלוסייה, ויהא סביר ושכיח לאתר קוביות חלשות בהפרש ניכר מהערך הממוצע בתקרה ב', בה הפיזור גדול מאשר בתקרה א' בעלת הפיזור היותר קטן. בלשון מקצועית, סטיית התקן היא ביחס הפוך למידת הנאמנות של ממוצע המדגם לאוכלוסייה.

שיטת חישוב

יהיה גודל המדגם n (n הוא מספר טבעי גדול מ-1).

n-1 הוא מספר דרגות החופש.

יהיו תוצאות הבדיקות של המדגם: X_n,.....X_3, X_2, X_1.

יהיה הממוצע החשבוני (האריתמטי): *Xa*.

$$\boldsymbol{X_a = [X_1 + X_2 + \cdots + X_n]:n}$$

תוגדר סטיית התקן בפילוג נורמלי: S, אך לצורך פשטות ונוחות, די להסתפק בפילוג ידידותי יותר המכונה "פילוג t" [המכונה גם "The Student's Distribution"]. לפיכך, S תהיה סטיית התקן המדגמית בפילוג t.

פילוג t מתאים למדגמים בהם n קטן מ-30 וזאת על פי "Small Sampling Theory".

תיאוריה זו הולמת יותר את הדרישות ההנדסיות.

יהיה U הערך המינימלי הגבולי הנדרש - ואם מדובר בחוזק הבטון, לדוגמא, אזי אסור כי יותר מ-5% (רמת וודאות של 95%; אפשר לקבוע רמת וודאות רצונית אחרת) - יהיה בחוזק קטן מ-U.

ההפרש בין הממוצע לבין הערך המינימלי הנדרש יסומן a; a יקבל תמיד ערכים חיוביים.

$$\boldsymbol{a = /U - X_a/}$$

בפילוג t בו מדובר, נעזרים בטבלה הסטטיסטית הבאה כדי לקבל את ערכי **a : s**.

S (כזכור, הסטייה המדגמית בפילוג t - הערך האקויוולנטי לסטיית התקן בפילוג נורמלי) מחושב כדלקמן:

$$\boldsymbol{S^2 = [1:(n-1)] \times [(X_1 - X_a)^2 + (X_2 - X_a)^2 + \ldots\ldots + (X_n - X_a)^2]}$$

לאמור, S ניתן לחישוב פשוט על פי תוצאות המדגם.

כאמור, ערכי a:s מצויים בטבלת הפילוג t, ומכאן ניתן לחשב את הערך של a (ההפרש בין הממוצע של המדגם לבין הערך המינימלי הנדרש), ואת הערך של U (הערך המינימלי הנדרש).

אם U קטן מהערך המינימלי הנדרש, הבטון (או כל תכונה אחרת נבדקת) ירוד.

אם U גדול מהערך המינימלי הנדרש - ברמת הוודאות שנקבעה, הבטון (או כל תכונה אחרת נבדקת) תקין ויש לאשרו.

טבלת ערכי a:s כפונקציה של t_p ו- **n-1**

[p - רמת וודאות; (n - 1) - דרגות חופש; n - גודל המדגם].

בטבלה נתונים ערכי $\frac{a}{s}$ כפונקציה של t_p ו- n-1.

n-1	$t_{0.995}$	$t_{0.99}$	$t_{0.95}$	$t_{0.9}$	$t_{0.8}$	$t_{0.7}$	$t_{0.6}$
1	63.66	31.82	6.31	3.08	1.376	0.727	0.325
2	9.92	6.96	2.92	1.89	1.061	0.617	0.289
3	5.84	4.54	2.35	1.64	0.978	0.584	0.277
4	4.60	3.75	2.13	1.53	0.941	0.569	0.271
5	4.03	3.36	2.02	1.48	0.920	0.559	0.267
6	3.71	3.14	1.94	1.44	0.906	0.553	0.265
7	3.507	3.00	1.90	1.42	0.896	0.549	0.263
10	3.17	2.23	1.81	1.37	0.879	0.542	2.260
20	2.84	2.09	1.72	1.32	0.860	0.553	0.257
30	2.75	2.04	1.70	1.31	0.854	0.530	0.256
אין סוף	2.58	1.96	1.645	1.28	0.842	0.524	0.253

מקור הטבלה: ראה מראה מקום מס' 1.

דוגמאות חישוב

דוגמא א':

מכיוון שהפיזור משפיע יותר מהממוצע, אין לדלג על חישוב אשר כלול בו פרמטר זה (מידת הפיזור), והדוגמאות הבאות ימחישו נושא זה.

נתונים:

נלקח מדגם ראשון בן 4 דגימות (דרגת חופש 3) - תוך דרישה כי רמת הוודאות תהיה 95% (בטבלה: $t_{0.95}$). במצב דברים זה, אסור שיותר מ-5% מהבטון יהיה בעל חוזק מתחת ל- u_0 - דרישת החוזק של הבטון - שאף היא נתון: ק"ג/סמ"ר 200 = u_0

תוצאות המדגם:

$$X_1 = 242 \text{ ק"ג/סמ"ר}$$

$$X_2 = 235 \text{ ק"ג/סמ"ר}$$

$$X_3 = 235 \text{ ק"ג/סמ"ר}$$

$$X_4 = 240 \text{ ק"ג/סמ"ר}$$

יחושב הממוצע:

$X_a = [242 + 235 + 235 + 240] : 4 =$ <u>238</u> ק"ג/סמ"ר

תחושב הסטייה המדגמית S:

$$\boldsymbol{S^2 = [1 : (n-1)] \times [(X_a - X_1)^2 + (X_a - X_2)^2 + (X_a - X_3)^2 + (X_a - X_4)^2]}$$
$$= [1 : 3] \times (4^2 + 3^2 + 3^2 + 2^2) = 12.66$$

<u>S = 3.56</u>

על פי הטבלה, עבור n - 1 = 3 ו- $t_{0.95}$

מתקבל כי - a : s = 2.35

לפיכך - a : 3.56 = 2.35

a= 3.56x 2.35 = 8.34

בקרוב מספיק - a =8 ק"ג/סמ"ר

a = /u - X_a/

8 = /U – 238/

מבחינה מתמטית: U = 238 + 8

או: U = 238 - 8

מבחינה הנדסית ברור כי: U = 238 - 8 = 230 ק"ג/סמ"ר

U > U_0 = 200 ק"ג/סמ"ר

מסקנה: הבטון עבר את מבחן החוזק.

<u>דוגמא ב'</u>

הנחת יסוד תהיה - בטון טוב הוא בטון כזה ש- 70% מעל חוזק לחיצה של 300 ק"ג/סמ"ר.

גודל המדגם - n = 3 [דרגת חופש: n - 1 = 2].

תוצאות המדגם הן כדלקמן:

X_3 = 450 ק"ג/סמ"ר X_2 = 350 ק"ג/סמ"ר X_1 = 250 ק"ג/סמ"ר

מכאן יחושב הממוצע החשבוני של המדגם:

$$X_a = [X_1 + X_2 + X_3] : 3$$

$$X_a = [250 + 350 + 450] : 3 = 350\ kg/smr$$

כאמור לעיל, בפילוג t הערך של P הוא: 0.7 = 70%

מכאן - נחפש בטבלה את הטור t_p המתאים שהוא: $t_{0.7}$.

עבור $t_{0.7}$ ו- $n - 1 = 2$ מתקבל ערך של $a : s$ כדלקמן:

$a : s = 0.617$

יחושב הערך של S (סטיית התקן המדגמית) עלפי הנוסחה:

$$\boldsymbol{S^2 = (1:2)[(X_1 - X_a)^2 + (X_2 - X_a)^2 + (X_3 - X_a)^2]}$$

$$S^2 = (1:2)[100^2 + 0 + 100^2] = 10{,}000$$

S = 100

a : s = 0.617 a = 0.617 × 100 = 61.7

$$/U_0 - X_a/ = \text{a}$$

U = 350 - 61.7 = 288.3 ק"ג/סמ"ר

משמע, הערך שהתקבל קטן מ- 300 ק"ג/סמ"ר ולכן הבטון ירוד ואין לקבלו.

עינינו הרואות, למרות שהדרישה היא בטון בעל חוזק של 300 ק"ג/סמ"ר והממוצע של הדגימות במקרה זה גדול בהפרש רב מהדרישה, הבטון נפסל.

"תרמו" לפסילת הבטון שני פרמטרים אשר השפיעו על התוצאה יותר מאשר הממוצע, והם - הפיזור של התוצאות, והערך p.

<u>דוגמא ג'</u>

דוגמא להמחשת חשיבות הפיזור יותר מאשר השפעת הממוצע:

בדיקת מדגם בן 5 דגימות:

$$X_1 = 410, \quad X_2 = 450, \quad X_3 = 446, \quad X_4 = 452, \quad X_5 = 530$$

נדרש כי 95% מהבטון יהיה בחוזק 350 ק"ג/סמ"ר.

חישוב הממוצע האריתמטי של הדגימות:

$$X_a = 457.6 \text{ ק"ג/סמ"ר}$$

חישוב סטיית התקן המדגמית 5 על פי הנוסחאות לעיל: S = 44

דרגת חופש $n - 1 = 4$, ועל פי הטבלה של פילוג t עבור $\boldsymbol{n - 1 = 4}$ ו- $t_{0.95}$ מתקבל - $a : s = 2.13$

מכאן: $a = 2.13 \times 44 = 93.6$

והבטון הוא בחוזק של $u = 457.6 - 93.6 = 364 kg/sm^2$

עתה, כתרגיל להוכחה ולהמחשת הנטען, נסיר מן המדגם את התוצאה הכי גבוהה [לכאורה – הכי טובה], ויתקבל מדגם בן 4 (דרגת חופש = 3);

הממוצע יהיה, כמובן יותר קטן מזה של חמש הדגימות: $X_a = 439.5$

$S = 19.8$

עבור $t_{0.95}$ ו- $n - 1 = 3$ יתקבל מהטבלה: $a : s = 2.35$

$$a = 2.35 \times 19.8 = 46.6$$

$$U = 439.5 - 46.6 = \underline{392.9\ kg/sm^2}$$

מתקבלת, לכאורה, סתירה - הורדנו את תוצאת המדגם "הכי טובה", והתקבל בטון נחות ביחס למצב טרם הסרת התוצאה ה"טובה".

אכן, הסתירה היא רק לכאורה, ובפועל ולמעשה אין שום סתירה.

בהורדת התוצאה הכי מעולה, התקבלו תוצאות מדגם עם פיזור יותר קטן, ולכן הבטון שנבדק - יותר חזק.

[דוגמא ג' היא עיבוד של שאלה ותשובה שהופיעו בגיליון 9-8/82 של **הנדסה ואדריכלות** בטאון אגודת האינג'נרים והארכיטקטים בישראל].

<u>דוגמא מהתקינה</u>

על פי התקן 975 שעניינו: <u>טיח</u>, טבלה מס' 3, הערה ב' -

"חוזק ההידבקות הממוצע של המערכת לא יהיה קטן מ-0.3 מגפ"ס, ושל כל דוגמת בדיקה לא יהיה קטן מ- 0.15 מגפ"ס".

מגפ"ס = מגה פקסל; 1 מגפ"ס = 10.2 ק"ג/סמ"ר.

במסגרת התקן ובחסות האמור בו, יש מצב לדחות טיח עם חוזק הידבקות טוב יותר מאשר טיח עם חוזק הידבקות נחות אשר עובר את המבחן שבתקן; יש מקום לאשר טיח נחות, ולדחות טיח טוב מבחינת חוזק ההידבקות.

הביקורת היא אכן קשה, אך נכונה.

הדרישה לחוזק הידבקות מינימלי לגבי דגימה אחת כלשהי מהמדגם, אינה מהווה תחליף לפרמטר הפיזור.

להלן תרגיל חישובי המוכיח כי למרות התאמת המדגם לדרישות התקן 975 בנושא חוזק ההידבקות של שכבת טיח לשכבת הרקע, <u>מדובר בטיח פסול.</u>

יהיה המדגם בן 4 יח' - $n - 1 = 3$.

תהיה הדרישה כי 95% מהמדגם יתאים לדרישה שבתקן לחוזק הידבקות נדרש 0.3 מגפ"ס.

ידוע כי דרישה נוספת היא שאף דגימה לא תתקבל תוצאה נמוכה מ- 0.15 מגפ"ס.

להלן שלוש תוצאות הדגימות:

$$X_1 = 0.17$$

$$X_2 = 0.34$$

$$X_3 = 0.33$$

$$X_4 = 0.40$$

$$X_a = (0.17 + 0.34 + 0.33 + 0.40) : 4 = 0.31$$

רואים כי המדגם עומד בדרישות התקן מבחינת הממוצע ומבחינת הערך המינימלי.

$$S^2 = (1:3)[(0.31 - 0.17)^2 + (0.31 - 0.34)^2 + (0.31 - 0.33)^2 + (0.31 - 0.4)^2]$$
$$= S^2 = 0.01$$

$S = 0.1$

מתוך הטבלה מתקבל: $a : s = 2.35$

$$a = 2.35 \times 0.1 = 0.235$$

מגפ"ס $U = X_a - a$ = 0.31 -0.235 = 0.075

<u>קטן בהפרש רב (פי 4!) מהתוצאה הדרושה, שהיא 0.3 מגפ"ס.</u>

מסקנה: טיח עם הידבקות ירודה ביותר - מאושר כתקין, ועובר מבחן התאמה לתקן הישראלי.

הערה: כאשר מתקבל בחישוב ערך שלילי של U, אין התאמה (אין עמידה בדרישות).

סיכום

סימפטום זה מצוי בתקנים נוספים; יש דרישה לחוזק מינימלי של ממוצע המדגם, ויש גם דרישה שבדיקה בודדת לא תרד מעבר לגבול כלשהו.

שתי דרישות אלו <u>אינן מספיקות</u>, ומאפשרות קבלה ואישור של מוצר נחות, לעומת דחיה וביטול של מוצר תקין, בחישוב סטטיסטי נכון.

מקורות

1) **Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research** (5 th ed) - R.A. Fisher and F. yates, Table 3, Oliver and Boyd Ltd.

2) **הנדסה ואדריכלות**. 5/82 בהוצאת אגודת האינג'נרים והארכיטקטים בישראל.

3) **הנדסה ואדריכלות**, 8-9/82, בהוצאת אגודת האינג'נרים והארכיטקטים בישראל.

4) תקנים ישראליים.

תודתי נתונה למר רונן לישאור.